

College-examen schriftelijk

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen. Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen. Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formulekaart

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t) \cos(u) + \cos(t) \sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t) \cos(u) - \cos(t) \sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t) \cos(u) - \sin(t) \sin(u)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t) \cos(u) + \sin(t) \sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Correlatie en regressie

De correlatiecoëfficiënt $R = \frac{\text{Covar}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

Regressielijn van Y op X : $Y = aX + b$ met $a = R \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

Regressielijn van X op Y : $X = pY + q$ met $p = R \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ $a \cdot p = R^2$

Meetkunde

De volgende definities en eigenschappen mogen zonder bewijs gebruikt worden bij het oplossen van de vragen. Noteer bij elke bewijsstap welke definitie/eigenschap je gebruikt hebt.

hoeken en lijnen

Gestreekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, bissectrice, middelloodlijn, middenparallel.

driehoeken

Hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zZR; hoogtelijn driehoek, zwaartelijn driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, gelijkbenige rechthoekige driehoek, Pythagoras.

vierhoeken

Hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

cirkel

Koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, koordenvierhoek.

kegelsneden

Raaklijneigenschappen van parabool, ellips en hyperbool.

Fietsbanden

Wielrenners maken veel trainingskilometers voordat ze aan een wielervedstrijd deelnemen. Het aantal kilometers dat Mathieu tijdens zijn trainingen rijdt, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 900 km per week en een standaardafwijking van 27 km.

- 4p **1** Bereken de kans dat Mathieu in vier weken meer dan 3700 km rijdt. Geef het antwoord in drie decimalen.

Mathieu gaat in januari op trainingskamp naar het zonnige Calp in Spanje. Gedurende zijn trainingskamp maakt Mathieu iedere dag twee trainingsritten. Tijdens zo'n trainingsrit is voor iedere band de kans om lek te raken 0,005. We nemen aan dat een band tijdens een rit nooit voor de tweede keer lek raakt.

- 3p **2** Bereken de kans dat op een dag de twee trainingsritten van Mathieu zonder lekke band eindigen. Geef het antwoord in vier decimalen.

Een fietsenwinkelier in Calp verkoopt banden van het merk Benido. De winkelier beweert dat de kans dat met een set nieuwe banden van dit merk een wielrenner een trainingsrit kan rijden zonder een lekke band, minstens 0,999 is.

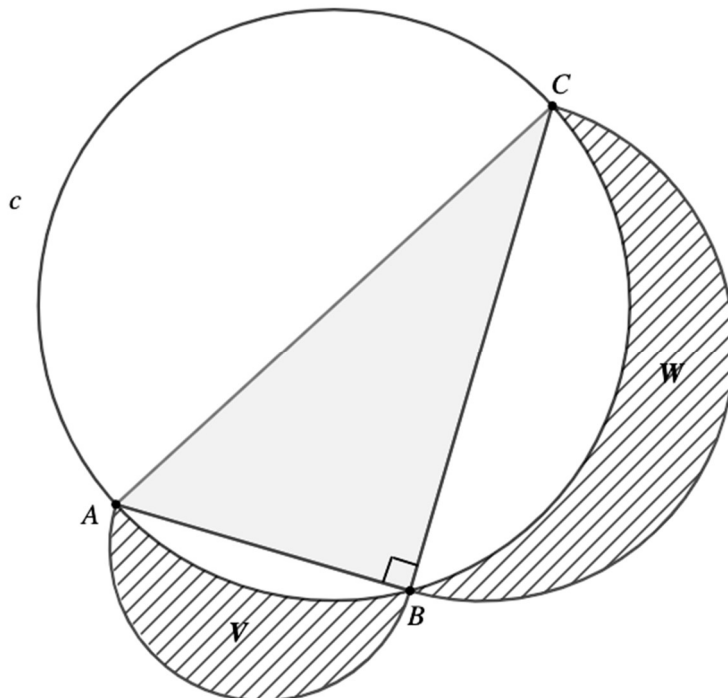
Mathieu heeft nog nooit van dit merk gehoord en gelooft de winkelier eigenlijk niet. Hij besluit de proef op de som te nemen en schaft voor elke trainingsrit een set nieuwe banden van het merk Benido aan.

Van de volgende 40 trainingsritten eindigen er 39 zonder een lekke band.

- 4p **3** Is er bij een significantieniveau van 3% reden om de bewering van de fietsenwinkelier in twijfel te trekken?

Een rechthoekige driehoek en twee manen

Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC met zijn omschreven cirkel c . De zijden AB en BC zijn de middellijnen van twee halve cirkels. De vlakdelen V en W zitten ingesloten tussen cirkel c en de twee halve cirkels. Deze vlakdelen hebben de vorm van een maan. Zie de figuur hieronder.



- 5p 4 Bewijs dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan de oppervlakte van de twee vlakdelen V en W samen.

Derdegraads- en kwadratische functie

Gegeven is de functie $f(z) = z^3 - 8z^2 + 25z - 26$.

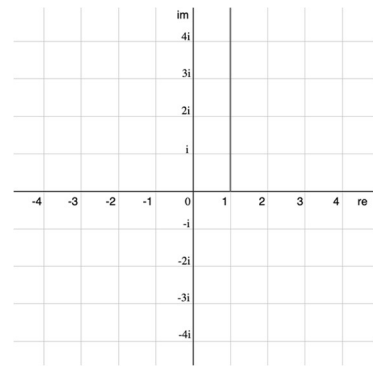
Het complexe getal $z = 2$ wordt in het complexe vlak door de functie f op de oorsprong afgebeeld. De functie f heeft naast $z = 2$ nog twee andere nulpunten.

- 5p 5 Bereken exact de afstand tussen deze twee nulpunten.

Verder is gegeven de functie $g(z) = -8z^2 + 25z + 1$. Er zijn drie getallen die door de functies f en g op hetzelfde punt worden afgebeeld.

- 4p 6 Bereken exact deze drie getallen door de vergelijking $f(z) = g(z)$ op te lossen. Schrijf de antwoorden in de vorm $z = a + bi$.

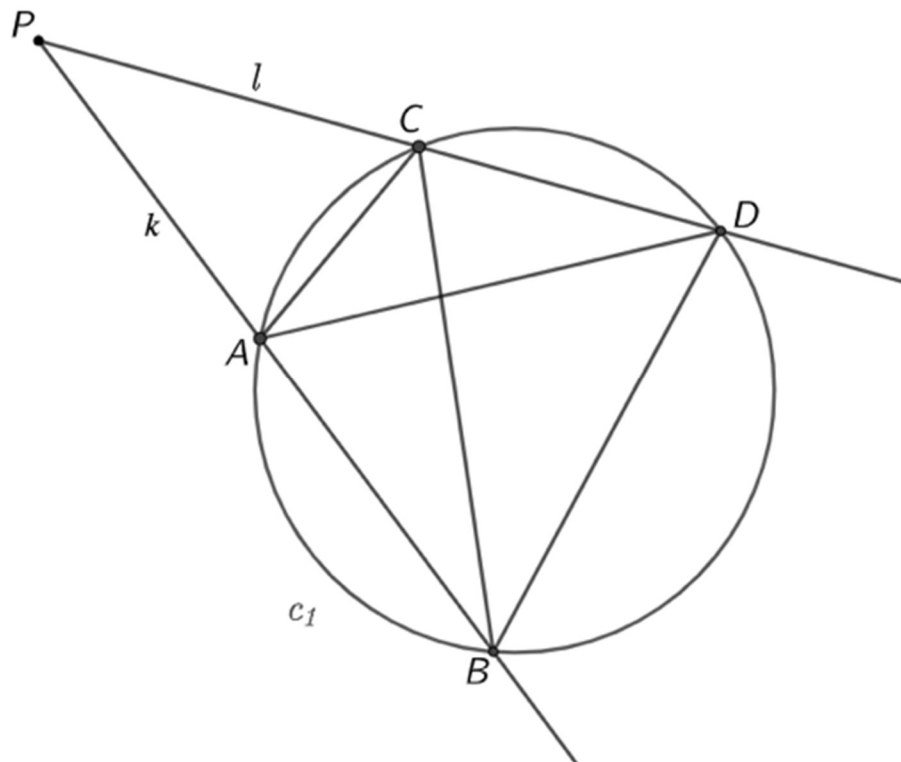
- 4p 7 Teken in het complexe vlak in de uitwerkbijlage de punten die door de functie $h(z) = -8z^2 + 1$ op de halve lijn worden afgebeeld waarvoor geldt: $\operatorname{Re}(z) = 1$ en $\operatorname{Im}(z) = c$ met $c \geq 0$. Zie de figuur hiernaast.



Raaklijnen aan een cirkel

De lijnen k en l gaan door het punt P en snijden de cirkel c_1 in de punten A, B, C en D . Zie figuur 1.

- 3p 8 Bewijs dat $AD \cdot CP = AP \cdot BC$

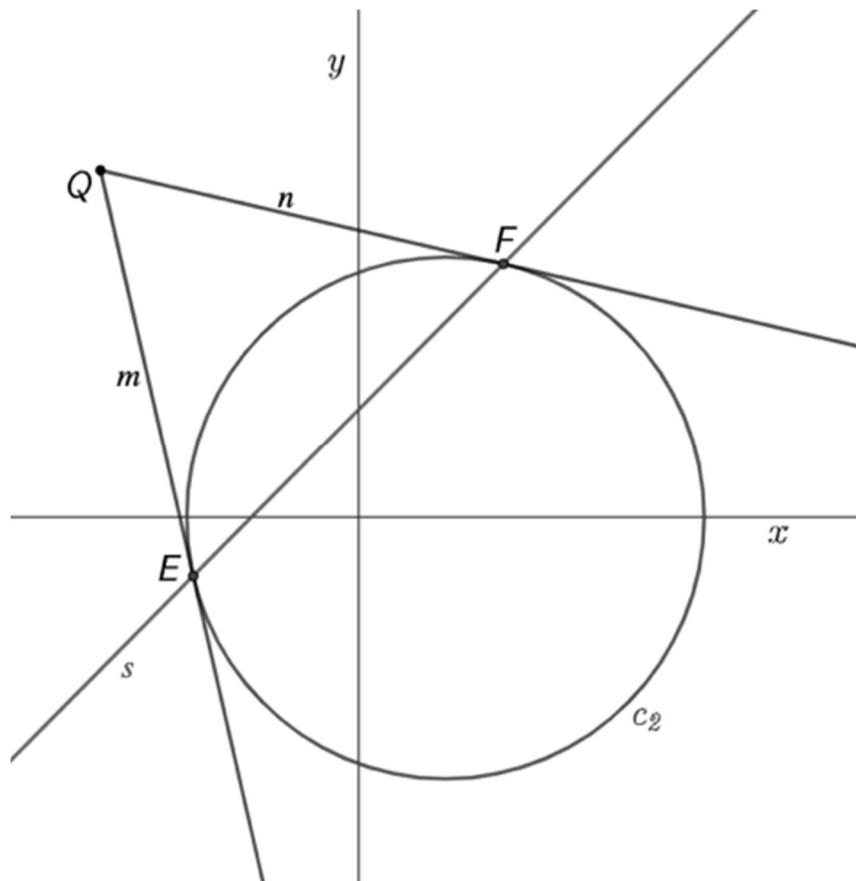


Figuur 1

De lijnen m en n gaan door het punt $Q(-3, a)$ en raken de cirkel $c_2: (x - 1)^2 + y^2 = 9$ in de punten E en F . De lijn s gaat door de punten E en F .

Zie figuur 2.

- 4p 9 Bereken exact voor welke waarde van a de lijn s evenwijdig is met de lijn $y = x$.



Figuur 1

Bungeejumpen

Bij bungeejumpen (elastiekspringen) springt iemand die vastgebonden is aan een elastieken koord van bijvoorbeeld een brug. Tijdens de sprong zijn snelheden tot 120 kilometer per uur mogelijk. Uiteindelijk remt het koord de val van de springer, waarna deze nog een aantal keren op en neer veert en uiteindelijk tot stilstand komt.



Om bij de vrije val van de bungeejumper een dynamisch model op te stellen, maken we gebruik van de tweede wet van Newton: $F_R = m \cdot a$. Hierbij is m de massa van de bungeejumper in kg, a de versnelling in m/s^2 en F_R de resulterende kracht in N (Newton), dat is de som van alle krachten die de bungeejumper ondervindt.

Een bungeejumper met een massa van 80 kg springt op $t = 0$ van een brug. Op de bungeejumper werken tijdens de vrije val de volgende krachten:

- Zwaartekracht F_Z van 784 N.
- Wrijvingskracht F_W met $F_W = \frac{1}{4}v^2$. Hierbij is F_W in N en v de valsnelheid in meter per seconde.

Voor de resulterende kracht geldt: $F_R = F_Z - F_W$.

Met behulp van bovenstaande gegevens kan bij de snelheid van de bungeejumper het volgende dynamische model worden opgesteld:

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{1}{320}v^2.$$

Als de val van de springer niet door een koord zou worden geremd, zou hij volgens het dynamische model een snelheid van ruim 200 kilometer per uur bereiken.

3p 10 Toon dit algebraïsch aan.

$v(t) = \frac{56(e^{0,35t}-1)}{e^{0,35t}+1}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{1}{320}v^2.$$

5p 11 Bewijs dit.

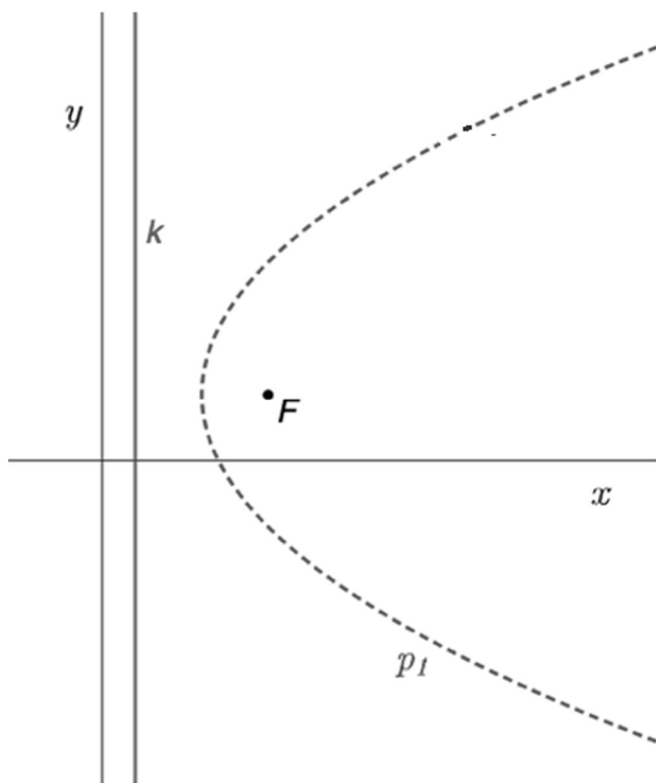
De vrije val van de bungeejumper wordt door een elastieken koord geremd precies na het bereiken van een snelheid van 30 meter per seconde.

4p 12 Bereken de lengte van het koord. Rond af op hele meters.

Twee parabolen

Gegeven is de lijn $k: x = \frac{1}{2}$ en het punt $F(2\frac{1}{2}, 1)$.

- 3p 13 Toon aan dat het punt $A(5\frac{1}{2}, 5)$ op de parabool ligt met brandpunt F en richtlijn k .



Figuur 1

De punten met gelijke afstanden tot de lijn k en punt F liggen op een parabool p_1 .

Bij deze parabool die gestippeld is weergegeven in figuur 1, hoort de vergelijking

$$x = ay^2 + by + c.$$

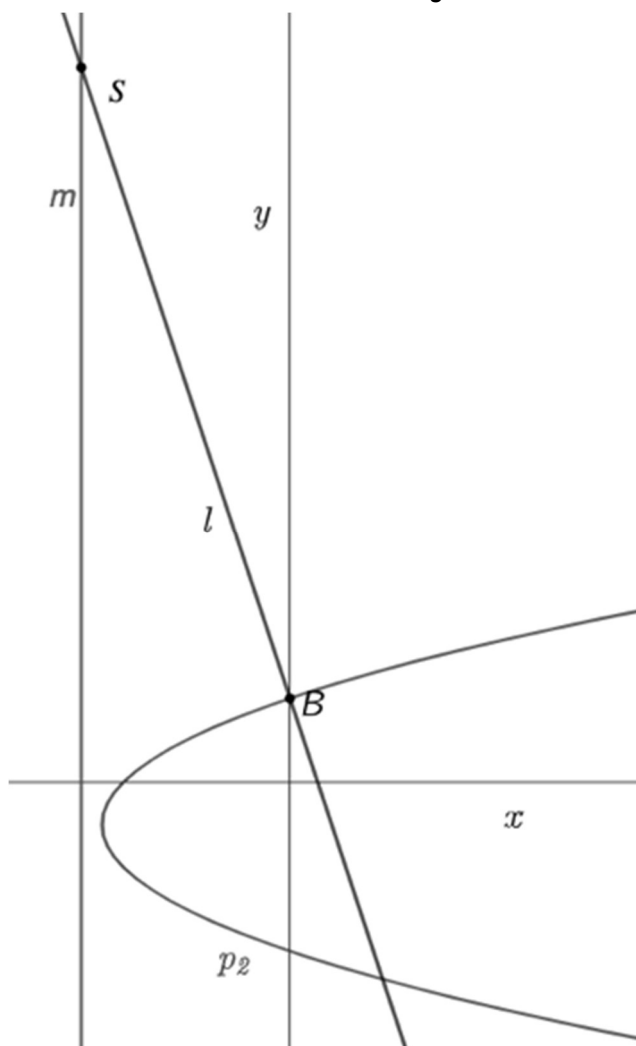
- 4p 14 Bereken exact de waarden van a en b en c .

Het punt $B(0, 1)$ ligt op de parabool p_2 met vergelijking $x = y^2 + y - 2$.

De lijn l gaat door B en staat loodrecht op de parabool. Lijn l snijdt de richtlijn m van parabool p_2 in het punt S . Zie figuur 2.

5p 15 Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S .

Figuur 2



Loterij

Bij deelname aan een loterij kun je een bedrag van 1, 5 of 10 euro uitbetaald krijgen. Een lot kost 1 euro. De hierbij passende kansverdeling is hieronder te zien.

De toevalsvariabele U staat voor de uitbetaling.

U in euro's	0	1	5	10
$P(U = u)$..	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{5a}$	$\frac{1}{10a}$

2p 16 Laat zien dat $P(U = 0) = \frac{10a-13}{10a}$.

Stel dat er in totaal 1200 loten zijn verkocht en dat $a = 5$.

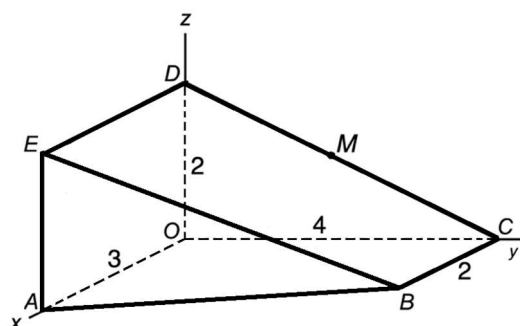
3p 17 Bereken hoeveel van deze loten naar verwachting geen winst opleveren.

3p 18 Bereken a in het geval de verwachte winst voor een deelnemer aan de loterij gelijk is aan $-0,25$ euro.

Hoek tussen lijn en vlak

Gegeven is de ruimtelijke figuur hiernaast met $A(3,0,0)$, $B(2,4,0)$, $C(0,4,0)$, $D(0,0,2)$ en $E(3,0,2)$. Het punt M is het midden van de ribbe CD .

5p 19 Bereken de hoek die de lijn BM en het vlak ABE met elkaar maken. Geef het antwoord in gehele graden.



Rijen

Gegeven is de rij met de volgende directe formule $u(n) = 2n^2 - 80n + 700$.

Er geldt $u(n+1) = 2n^2 - 76n + 622$.

3p 20 Toon dit aan en stel de recursieve formule op die bij deze rij hoort.

Verder is gegeven de rekenkundige rij v waarvoor geldt:

$$\sum_{k=0}^n v(k) = -5n^2 + 95n + 100.$$

5p 21 Los algebraïsch op $u(n) < v(n)$.